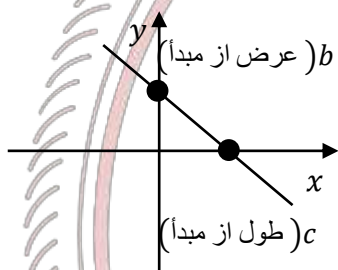


فصل اول

هندسه تحلیلی

معادله خط و نقطه

هر خط دلخواه در فضای مختصاتی دارای معادله $y = ax + b$ می باشد که a را شیب و b را عرض از مبدأ می نامیم.



عرض از مبدأ محل برخورد خط یا نمودار با محور

نکته y می باشد.

به محل برخورد خط با محور x طول از مبدأ

نکته می گوئیم.

ALIREZA KASIRI

طول از مبدأ و عرض از مبدأ خط به معادله $2y = 3x + 6$ را بیابید؛ سپس شیب خط را

مثال محاسبه کنید.

معادله خطی به شیب m که از نقطه $A(x_A, y_A)$ می گذرد برابر است با :

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

نکته

مثال ✖

معادله خطی را بنویسید که شیب آن ۲ بوده و از نقطه $(-۱, ۳)$ بگذرد.

یادآوری

اگر A و B دو نقطه دلخواه روی خط باشند، آنگاه شیب خط برابر است با :

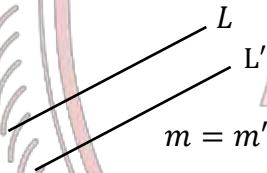
$$x = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$$

مثال ✖

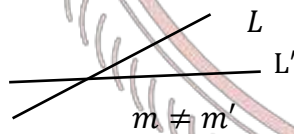
شیب خط واصل بین دو نقطه $A(۲, ۵)$ و $B(۱, ۳)$ را بیابید.

وضعیت دو خط

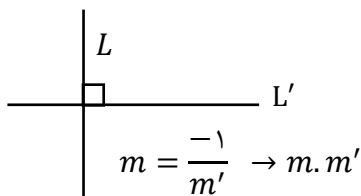
① دو خط موازی : دو خط موازی دارای شیب‌های برابر هستند.



② دو خط متقاطع : اگر شیب خطوط برابر نباشند، آنگاه دو خط در یک نقطه متقاطع هستند و یکدیگر را قطع می‌کند.



③ متقاطع عمود : اگر دو خط بر هم عمود باشند آنگاه شیب آنها معکوس و قرینه هم است.



مثال ✖ فرض کنید خط $y - \frac{1}{4}nx + 2 = 0$ بر خط‌های $y - (3 - m)x = -1$ و $y = (2m - 8)x + 5$ عمود باشد. در اینصورت مقادیر m و n را بدست آورید.

نکته  اگر عرض از مبدأ و طول از مبدأ خطی معلوم باشد برای شیب آن خط داریم:

$$m = - \frac{\text{عرض از مبدأ}}{\text{طول از مبدأ}} = - \frac{y}{x} = - \frac{q}{p} = 1$$

دو حالت خاص خط

① خطی که موازی محور x باشد دارای شیب $(m = 0)$ است و معادله آن به صورت $y = b$ است.

② خطی که موازی محور y باشد دارای شیب تعریف نشده است و معادله آن به صورت $x = k$ است.

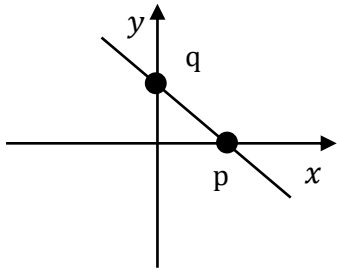
برای فرم غیر استاندارد دو خط دلخواه داریم:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} & (\text{دو خط موازی منطبق}) \\ \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} & (\text{دو خط موازی غیر منطبق}) \\ \frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} & (\text{دو خط متقاطع}) \end{cases}$$

مثال ✖ دو ضلع مقابل متوازی الاضلاعی روی خطوط $y = 2mx + m + 1$ و $(6 + m)x - my + 6 = 0$ واقع هستند؛ مقدار m را بیابید.

نکته برخورد یک خط با محورهای مختصات سبب تشکیل

یک مثلث قائم‌الزاویه می‌شود که مساحت آن برابر است با:

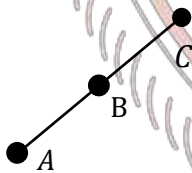


مثال خطی محورهای مختصات را در نقاط $(0, 2)$ و $(4, 0)$ قطع می‌کند؛ مساحت مثلث حاصل از برخورد خط با محورها را بیابید.

مثال خط $2x - 3y + 3 = 0$ محورهای مختصات را در نقاط A و B قطع می‌کند. مساحت مثلث AOB را بیابید.

سه نقطه روی یک خط

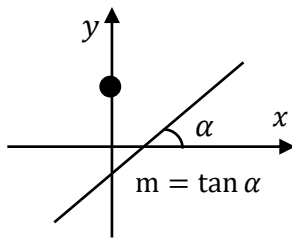
قرارگیری سه نقطه A و B و C روی یک خط راست را به اصطلاح هم راستا می‌گوئیم به طوری که شیب خط واصل بین نقاط همگی با یکدیگر برابر باشند:



مثال اگر سه نقطه $(a, 3)$ و $(6, 4a + 1)$ و $(0, 0)$ در یک راستا قرار گیرند مقدار a را بیابید.

زاویه یک خط با محورهای مختصات

تانژانت زاویه‌ای که یک خط با جهت مثبت محور x می‌سازد همان شیب خط است:



۵

مثال خطی با سمت مثبت محور x ها زاویه ۱۳۵° می‌سازد و خط به معادله $y = ۲x - ۱$ را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع می‌کند؛ معادله این خط را بیابید.

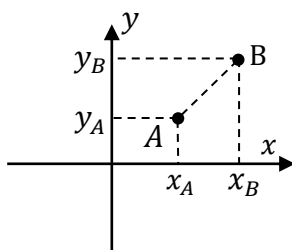
دسته خطوط

معادله‌ای پارامتری که در آن متغیر دیگری جز x و y وجود دارد و بیان کننده معادلات خطوطی است که از یک نقطه مشترک عبور می‌کنند.

ALIREZA KASIRI

مثال دسته خطوط به معادلات $mx + (x + ۲)y = ۶$ از نقطه ثابتی می‌گذرند. مجموع طول و عرض این نقطه را بیابید.

فاصله دو نقطه



$$|AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

مثال ✕

اگر $A(4, 2)$ و $B(4, -2)$ دو سر قطر یک دایره باشند. اندازه قطر و شعاع دایره را بیابید.
(همانگ کشوری)

مثال ✕

نقاط $A(4, 2)$ و $B(1, 0)$ و $C(k, -k)$ سه رأس یک مثلث هستند؛ اگر مثلث در رأس B قائمه باشد، مقدار k را بیابید. (همانگ کشوری)

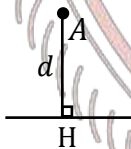
مثال ✕

فاصله نقاط $A(1-a, a-2)$ تا مبدأ مختصات برابر ۵ است. مجموعه مقادیر a را بیابید.

فاصله نقطه از خط

فاصله نقطه $A(x, y)$ از خط $ax + by + c = 0$ برابر است با:

$$d = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



مثال ✕

اگر نقطه $A(1, 2)$ فاصله اش تا خط $ax + 4y = 1$ برابر ۲ باشد، مقدار a چقدر است؟
(همانگ کشوری ۱۴۰۲)

مثال ✖ دو خط $3x - 2y = 2$ و $2x + 3y = 1$ معادله دو ضلع یک مستطیل اند و نقطه $A(1, 3)$ یک رأس مستطیل است. مساحت این مستطیل چقدر است؟ (هماهنگ کشوری ۱۴۰۳)

فاصله دو خط موازی

در حالت کلی فاصله دو خط موازی دلخواه مانند d و d' طبق رابطه زیر بدست می آید:

$$H = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

برای محاسبه فاصله دو خط موازی روش دیگری هم وجود دارد که طبق آن فاصله یک نقطه دلخواه از یک خط را تا خط دیگر محاسبه می کنیم:

$$H = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

مثال ✖ فاصله دو خط به معادلات $5x - 12y + 8 = 0$ و $-10x + 24y + 10 = 0$ کدام است؟ (کتاب درسی)

مثال ✖ فاصله بین دو خط موازی به معادلات $2x + y = 4$ و $4x + my = m + 4$ را بیابید؟ (آزمون شماره ۴ مدارس برتر)

مثال ✕

فاصله دو خط $\frac{4}{9}x + \frac{y}{3} - 1 = 0$ و $3y = -4x - 3$ را بدست آورید و معادله خطی که با این دو خط موازی می باشد و از دو خط به یک فاصله است را بیابید.

نقطه وسط یک پاره خط

مختصات نقطه وسط بین دو نقطه $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ به صورت $M(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2})$ می باشد؛ نقطه M روی عمودمنصف پاره خط AB قرار دارد؛ لذا معادله خط عمودمنصف AB دارای سبب قرینه معکوس خط AB می باشد.

مثال ✕

اگر $A(2, -1)$ و $B(4, -3)$ باشند، معادله عمودمنصف AB را بیابید.

مثال ✕

اگر نقطه $M(m-6, -1-2m)$ روی عمودمنصف پاره خط واصل بین دو نقطه $A(0, -3)$ و $B(6, 15)$ قرار داشته باشند، مقدار m را بدست آورید.

مثال ✕

قرینه نقطه $C(1, 2)$ نسبت به $m(-1, 4)$ را بدست آورید.

معادله درجه دوم و تابع درجه ۲

حل معادلات بیش از درجه ۲

• هر معادله به فرم $ax^{2k} + bx^k + c = 0$ را می‌توان به کمک تغییر متغیر $t = x^k$ به فرم معادلات درجه ۲؛ $at^2 + bt + c = 0$ تبدیل کرد.

مثال ✖

معادلات زیر را به کمک تغییر متغیر حل کنید.

$$2x^4 - 7x^2 - 4 = 0$$

$$(4 - x^2)^2 - 2(4 - x^2) - 15 = 0$$

(نهایی شهرپور)

$$2x - 3\sqrt{x} = 2$$

$$\left(\frac{x^2}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{x^2}{2} - 1\right) - 2 = 0$$

(نهایی)

مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه ۲

• اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ در نظر بگیریم؛ می‌توانیم بدون محاسبه ریشه‌ها مقدار حاصل جمع و ضرب ریشه‌ها را بدست آوریم. به طوری که:

$$s = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

$$p = \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

• علاوه بر حاصل جمع و ضرب ریشه‌ها می‌توان برای نسبت‌های زیر مقدار بدست آورد:

$$\alpha^2 + \beta^2 = s^2 - 2p$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = s^3 - 3sp$$

مثال ✖

اگر α و β ریشه‌های درجه دوم $2x^2 - 4x + 1 = 0$ باشند مطلوب است:

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} =$$

$$(\alpha\sqrt{\beta} + \beta\sqrt{\alpha}) =$$

معادلات پارامتری

به معادلاتی که در آن‌ها متغیری به جز x را داشته باشیم، معادلات پارامتری می‌گوئیم و در ابتدا باید حاصل آن متغیر را بدست آوریم.

مثال ✖

اگر α و β ریشه‌های معادله $2x^2 - 3mx + 4 = 0$ باشند، m را چنان تعیین کنید که داشته باشیم $\alpha\beta^2 + 4 = 0$.

مثال ✖

در معادله درجه دوم $2x^2 - 8x + m = 0$ اگر یکی از ریشه‌ها دو واحد از ریشه دیگر بزرگتر باشد، m و هر دو جواب را بیابید.

تشکیل معادله درجه ۲ با داشتن ریشه‌ها

اگر α و β به عنوان ریشه‌های یک معادله درجه ۲ باشند؛ برای آن معادله درجه ۲ داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha + \beta = s \\ \alpha \cdot \beta = p \end{array} \right\} \rightarrow x^2 - sx + p = 0$$

مثال ✖

معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن $(1 - \sqrt{2})$ و $(1 + \sqrt{2})$ باشد.

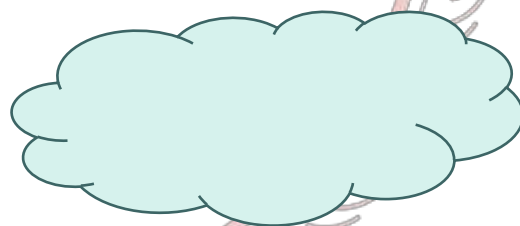
مثال ✖

معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن $\alpha = \frac{1+\sqrt{2}}{3}$ و $\beta = \frac{1-\sqrt{2}}{3}$ هستند.

نوشتن معادله درجه ۲ جدید با داشتن معادله مفروض

$$ax^2 + bx + c = 0$$

α و β



α' و β'

روند حل :

مثال ✖ اگر α, β ریشه‌های معادله $2x^2 - 6x - 1 = 0$ باشند، معادله‌ای بنویسید که ریشه‌های آن: 2α و 2β باشد:

$2 - \alpha^2$ و $2 - \beta^2$ باشد:

مثال ✖ اگر α, β ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 - 2x - 1 = 0$ باشد معادله‌ای بنویسید که ریشه‌های آن $\frac{1}{\alpha+1}$ و $\frac{1}{\beta+1}$ باشد.

مثال ✖ معادله‌ای بنویسید که ریشه‌های آن از معکوس ریشه‌های معادله درجه دوم $2x^2 - 3x - 1 = 0$ یک واحد کمتر است.

ماکزیمم و مینیمم سهمی

نمودار هر تابع درجه ۲ به فرم $y = ax^2 + bx + c$ را سهمی می‌گوئیم که بسته به علامت a به دو فرم زیر می‌باشد.



رأس سهمی (S)

نقطه‌ای در سهمی که بیشترین و یا کمترین مقدار عرض را دارد.

اگر $a > 0$ باشد، عرض رأس سهمی کمترین مقدار و اگر $a < 0$ باشد، عرض رأس سهمی بیشترین مقدار را دارد.

نتیجه: مقصود از Min یا Max عرض رأس سهمی است.

مختصات رأس سهمی به صورت

I (فرم استاندارد

$$y = a(x - h)^2 + k \Rightarrow S(h, k)$$

II (فرم گسترده

$$y = ax^2 + bx + c \Rightarrow S\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$$

III (در حالت کلی

$$S\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$$

مثال ✖

مقدار ماکزیمم یا مینیمم توابع زیر را بدست آورید.

$$f(x) = 2(x - 1)^2 + 3$$

$$f(x) = 3x^2 + 6x + 5$$

$$f(x) = -2x^2 + 8x - 5$$

مثال ✖

پنجره‌ای به شکل مستطیل داریم که در بالای آن یک مثلث متساوی‌الاضلاع قرار گرفته است. اگر محیط این پنجره $12m$ باشد. ابعاد مستطیل را طوری بیابید که پنجره حداکثر نوردهی را داشته باشد.

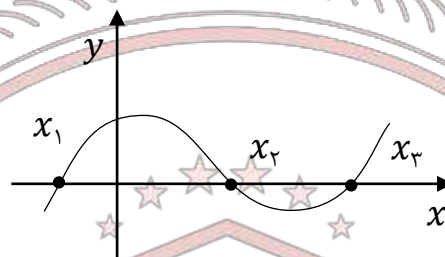
مثال ✖

می‌خواهیم کنار یک رودخانه محوطه‌ای مستطیل شکل ایجاد کنیم. اگر هزینه نصب 100 متر نرده را در اختیار داشته باشیم، ابعاد مستطیل را طوری بیابید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن گردد.

صفرهای تابع درجه ۲

به نقاط برخورد یک تابع مانند f با محور x ها را صفرهای تابع می‌نامیم که همان ریشه‌های معادله هستند، به عبارت برای بدست آوردن صفرهای یک تابع کافی است $f(x)$ قرار دهیم.

در شکل تابع f دارای ۳ صفر است، زیرا در ۳ نقطه با محور x برخورد داشته و آن را قطع کرده است.



مقدار ماکزیمم یا مینیمم توابع زیر را بدست آورید.

مثال

$$g(x) = 2x^3 + x^2 + 3x$$

$$f(x) = (x - \sqrt{x})^2 - (x - \sqrt{x}) - 6$$

$$f(x) = x - 3\sqrt{x} + 2$$

مشخص کردن علامت های a, b, c, Δ

(۱) اگر دهانه سهمی روبه بالا باشد : $a > 0$

(۲) اگر دهانه سهمی روبه پایین باشد : $a < 0$

(۱) علامت a

(۱) سهمی ۲ بار با محور x برخورد داشته باشد : $\Delta > 0$

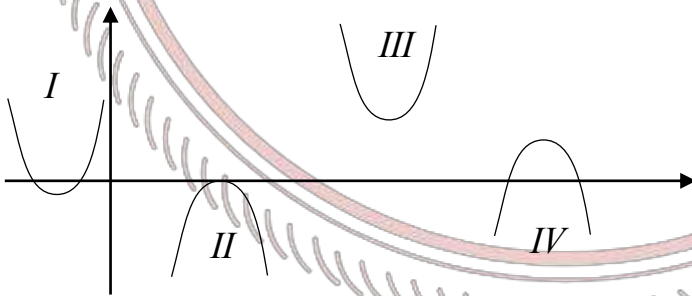
(۲) سهمی ۱ بار با محور x مماس شود : $\Delta = 0$

(۳) سهمی نقطه برخورد با محور x نداشته باشد : $\Delta < 0$

(۲) علامت Δ

در نمودارهای زیر علامت a و Δ را مشخص کنید.

مثال ✕



(۱) اگر سهمی محور y ها را در مثبت ها قطع کند : $c > 0$

(۲) اگر سهمی دقیقاً از مبدأ مختصات بگذرد : $c = 0$

(۳) اگر سهمی محور y ها را در منفی ها قطع کند : $c < 0$

(۳) علامت c

(۱) شیب خط مماس بر سهمی در نقطه برخورد با محور y ها مثبت باشد :

$b > 0$

(۲) شیب خط مماس بر سهمی در نقطه برخورد با محور y ها صفر باشد :

$b = 0$

(۳) شیب خط مماس بر سهمی در نقطه برخورد با محور y ها منفی باشد :

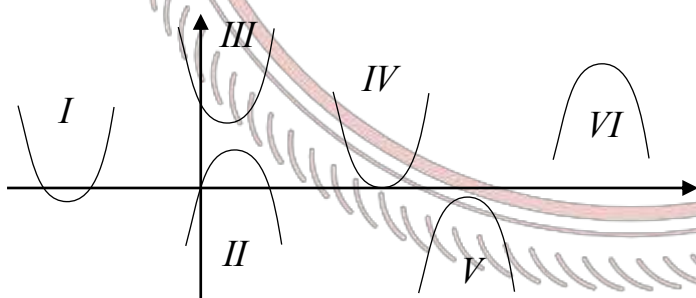
$b < 0$

(۴) علامت b

ALIREZA KASIRI

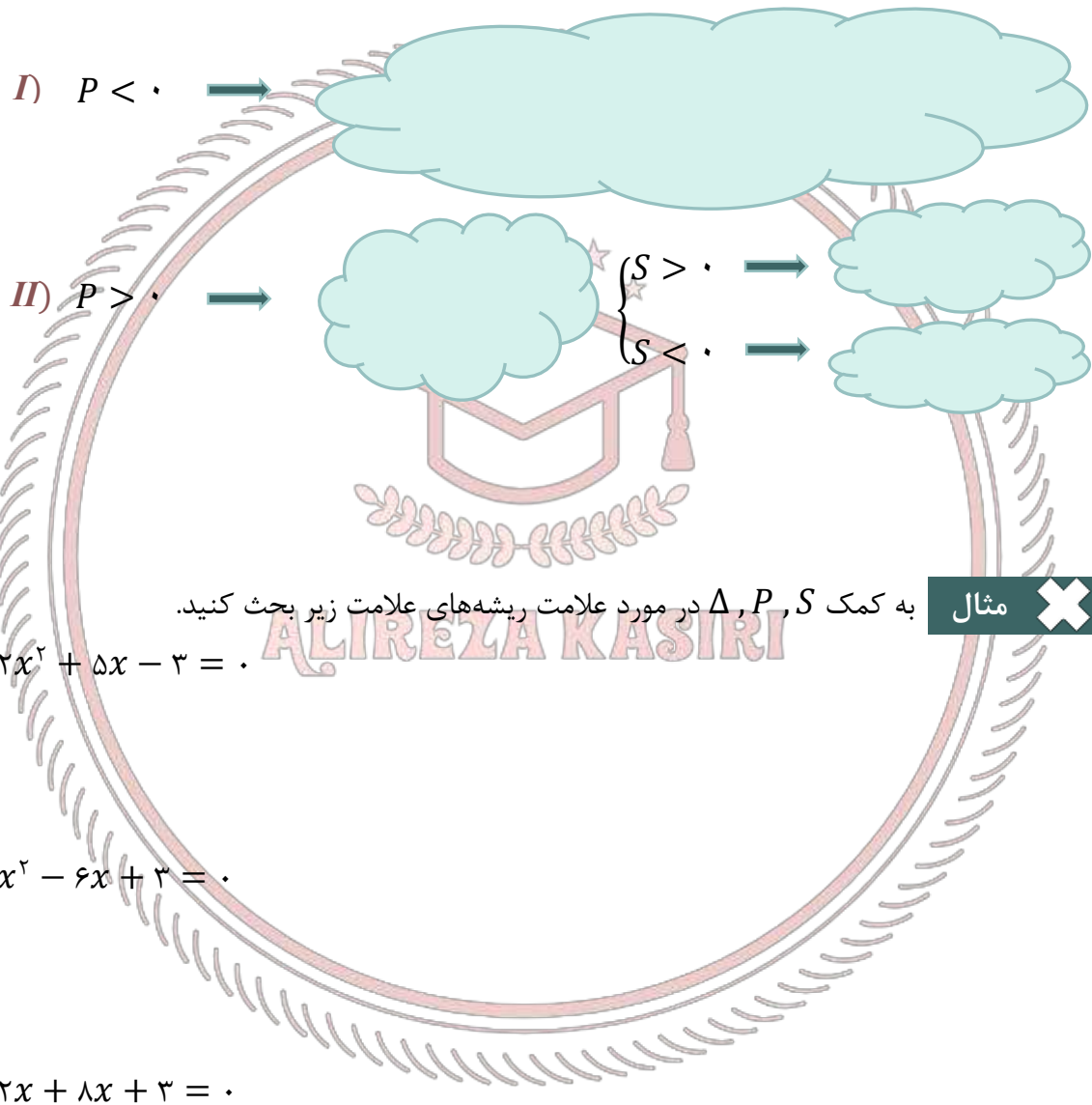
در نمودارهای زیر علامت a و Δ را مشخص کنید.

مثال



بحث روی علامت ریشه‌های معادله درجه ۲

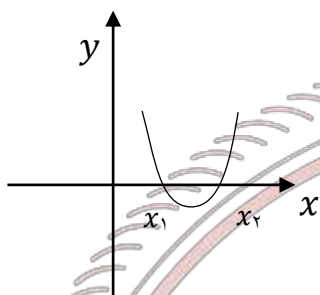
می‌دانیم در یک معادله درجه ۲ با $\Delta > 0$ دو ریشه داریم؛ حال می‌خواهیم درباره علامت ریشه‌ها بحث کنیم.



نوشتن معادله یک سهمی از روی نمودار

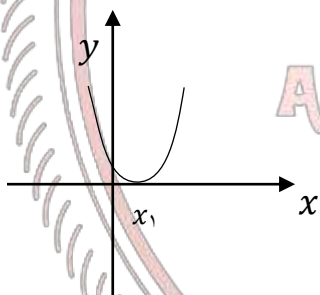
برای نوشتن معادله یک سهمی به فرم‌های زیر عمل می‌کنیم :

I) اگر نمودار سهمی محور ها را در ۲ نقطه قطع کرده باشد و آن ۲ نقطه را و بنامیم؛ در آن صورت معادله سهمی به فرم :



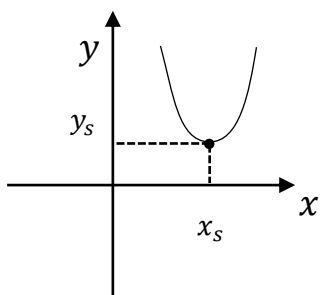
$y =$

II) اگر سهمی در یک نقطه بر محور ها مماس شود معادله آن به فرم :



$y =$

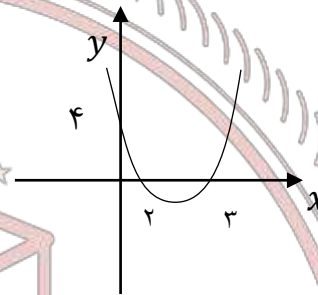
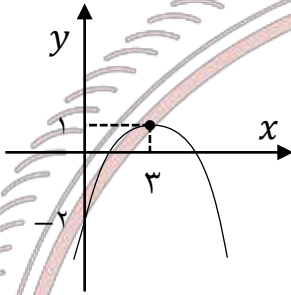
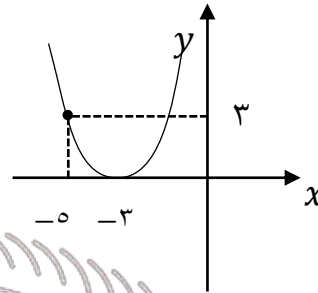
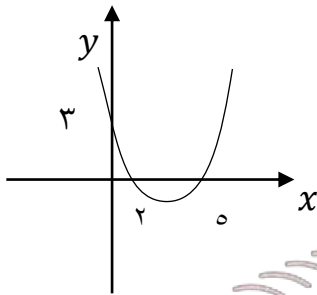
III) اگر رأس نمودار سهمی را در شکل داشته باشیم می‌توان معادله آن را به صورت :



$y =$

مثال ✖

معادلات نمودار سهمی‌های زیر را بنویسید.



ALIREZA KASIRI

تمرینات تشریحی

مثال ✖

معادلات زیر را حل کنید.

$$(x^2 + 1)^4 + (x^2 - 1)^2 - 2 = 0 \quad (\text{دی } ۱۴۰۱)$$

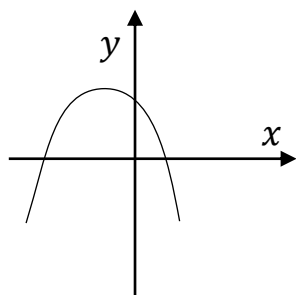
$$\left(\frac{x^2}{3} - 2\right)^2 - 11\left(\frac{x^2}{3} - 2\right) + 10 = 0 \quad (\text{شهریور } ۹۵)$$

مثال ✖ اگر α و β ریشه‌های معادلات درجه دوم $2x^2 + 4x - 1 = 0$ باشد؛ حاصل عبارت $\alpha\beta^{-1} + \beta\alpha^{-1}$ را بیابید؟ (هماهنگ کشوری)

مثال ✖ اگر $x = -2$ یکی از ریشه‌های معادله $4x^2 - mx - 2 = 0$ باشد؛ ریشه دیگر و مقدار m را بیابید. (هماهنگ کشوری ۱۴۰۲)

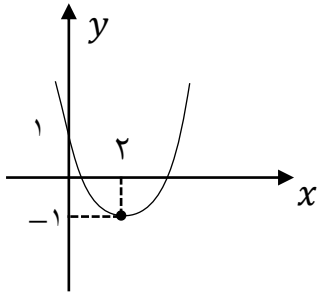
مثال ✖ معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن $\frac{2-\sqrt{3}}{5}$ و $\frac{2+\sqrt{3}}{5}$ باشد. (نهایی)

مثال ✖ در شکل زیر سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ داده شده است. علامت ضرایب a, b, c و تعداد ریشه‌ها را تعیین کنید.



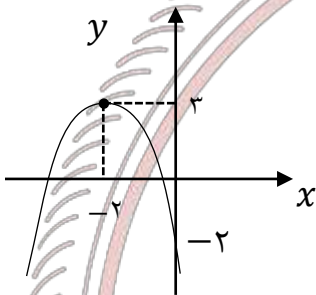
معادله سهمی به شکل زیر را بنویسید. (نهایی)

مثال ✕



معادله سهمی مقابل را بنویسید. (همانگ کشوری ۱۴۰۲)

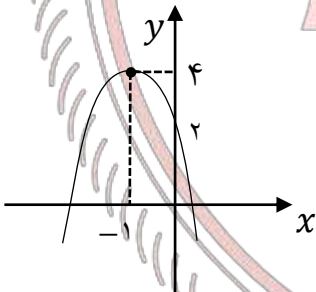
مثال ✕



نمودار سهمی $y = f(x)$ به صورت زیر است.

مثال ✕

جواب‌های معادله $f^2(x) + 12f(x) = 28$ را بدست آورید.



اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 4x + 2 = 0$ باشد؛ حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

مثال ✕

$$(2\alpha - 1)\beta^2 + \frac{\alpha^2}{4\beta} + \frac{1}{2\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$$

مثال ✖ می دانیم α و β دو ریشه مثبت معادله $x^2 + mx + 5 = 0$ هستند و $\alpha + \beta$ و $\alpha\beta$ به ترتیب تشکیل یک دنباله هندسی می دهند. مقدار m را بدست آورید.

تست های سراسری

تست 📖 فرض کنید x_1, x_2 ریشه های معادله $x^2 + 5x + 5 = 0$ باشد؛ $\frac{1}{(x_1+1)^3}$ و $\frac{1}{(x_2+1)^3}$ ریشه های کدام معادله هستند؟ (سراسری تجربی ۱۴۰۰)

- ① $125x^2 + 16x = 1$
- ② $125x^2 = 16x + 1$
- ③ $125x^2 = 12x + 1$
- ④ $125x^2 + 12x = 1$

تست 📖 اگر α و β ریشه های معادله $x^2 + 2(a+1)x + 2a - 1 = 0$ باشند. به ازای کدام مقدار a ، به ترتیب α, a, β تشکیل دنباله هندسی می دهند؟ (سراسری ریاضی ۱۴۰۱)

- ① -2
- ② 2
- ③ -1
- ④ 1

تست 📖 معادله های $x^2 + 6x + x = 0$ و $x^2 + 2x - 2x = 0$ یک ریشه مشترک غیر صفر دارند. اختلاف ریشه های غیر مشترک کدام است؟ (سراسری ریاضی ۱۴۰۱)

- ① 2
- ② 3
- ③ 4
- ④ 7

تست  α و β ریشه‌های متمایز معادله $\alpha x^2 - \alpha x - b = 0$ و $40\beta^2 + 20\alpha^2 - 20\beta = 17$ باشد؛ اختلاف ریشه‌های این معادله کدام است؟ (سراسری ریاضی ۱۴۰۲)

- ① $\frac{1}{\sqrt{5}}$
- ② $\frac{2}{\sqrt{5}}$
- ③ $\frac{1}{\sqrt{5}}$
- ④ $\frac{2}{\sqrt{5}}$

تست  صفرهای تابع $y = 2x^2 - (m=2)x + m$ و نقطه تقاطع آن با محور عرض‌ها، رئوس یک مثلث هستند. اگر مساحت این مثلث برابر $\frac{3}{4}$ باشد. کدام می‌تواند طول رأس سهمی زیر باشد؟ (سراسری تجربی ۱۴۰۲)

$$y = x^2 - mx + 1$$

- ① $\frac{1}{2}$
- ② $\frac{2}{3}$
- ③ $\frac{3}{4}$
- ④ $\frac{4}{5}$

تست  برای چند مقدار صحیح m ، هر دو ریشه معادله $x^2 + 5x + x = 0$ کوچکتر از $\frac{9}{4}$ است؟ (سراسری ۱۴۰۳)

- ① صفر
- ② ۱
- ③ ۴
- ④ ۵

تست برای چند مقدار صحیح a ، بیشترین مقدار سهمی $y = ax^2 + x + 2a$ برابر $-\frac{1}{4}$ است؟ (سراسری تجربی ۱۴۰۳)

- ① ۳
- ② هیچ مقدار a
- ③ ۲
- ④ ۱

تست معادله درجه دوم $3x^2 + (2m - 1)x + 2 - m = 0$ دارای دو ریشه حقیقی است. اگر مجموع ریشه‌ها با معکوس حاصل ضرب آن دو ریشه برابر باشد، مقدار m کدام است؟ (سراسری ۱۳۹۹)

- ① $\frac{7}{2}$
- ② $\frac{3}{2}$
- ③ $-\frac{1}{2}$
- ④ $-\frac{5}{2}$

تست به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، معادله درجه دوم $x^2 + (x - 2)x + m + 1 = 0$ دارای دو ریشه حقیقی مثبت است؟ (سراسری ۱۳۹۷)

- ① $-1 < m < 0$
- ② $m < 0$
- ③ $2 < m < 8$
- ④ $m > 8$

تست معادله درجه دوم $2x^2 + mx + m + 6 = 0$ دارای دو ریشه مثبت است. بازه مقادیر m کدام است؟ (سراسری ۱۳۹۹)

- ① $(-4, 0)$
- ② $(-4, -2)$
- ③ $(-6, 0)$
- ④ $(-6, -4)$

معادلات گویا

به هر معادله‌ای که در آن متغیر x در صورت و مخرج عبارات کسری قرار گیرد، معادلات گویا می‌گوئیم. در روند حل و بررسی معادلات گویا باید با استفاده از مخرج مشترک‌گیری عبارت‌ها را به صورت یک کسر تبدیل کنیم.

نکته



در بررسی و حل معادلات گویا دامنه توابع کسری تأثیرگذار می‌باشند و باید حتماً مورد توجه قرار گیرد، زیرا جواب‌های بدست آمده نباید مخرج کسر را صفر کند. برای درک بیشتر به نمونه مثال‌های زیر توجه کنید.

مثال ✖

معادله گویای زیر را حل کنید.

$$\frac{x-1}{x+3} = \frac{x+2}{x+4} \quad (\text{نهایی})$$

مثال ✖

معادله زیر را حل کنید.

$$\frac{x}{x-1} + \frac{3}{x^2-1} = \frac{x-2}{x+1} \quad (\text{نهایی})$$

مثال ✖

به ازای چه مقدار k معادله $\frac{1}{x-2} + \frac{8}{k} = \frac{3x}{x+2}$ دارای جواب $x=1$ است؟ (نهایی)

بررسی معادلات توصیفی و کاربردی گویا

در طرح مسائل توصیفی برای انجام کاری در مدت زمان مشخص باید زمان انجام کار برای هر شخص را مشخص کنیم. به طوری که اگر شخص A کاری را در زمان t_A و شخص B کاری را در زمان t_B انجام دهد در آن صورت مدت زمان که هر دو با همکاری یکدیگر آن کار را به پایان برسانند طبق رابطه روبه‌رو حاصل می‌شود.

$$t_{AB} = \frac{t_A \times t_B}{t_A + t_B}$$

مثال ✖

حسین کاری را در ۴ ساعت انجام می‌دهد، اگر دوستش امیر به او کمک کند دو نفر با هم همان کار را ۱ ساعت و ۲۰ دقیقه انجام می‌دهند. امیر به تنهایی این کار را در چند ساعت انجام می‌دهد؟

مثال ✖

سحر برای ویرایش علمی ۲۰ صفحه‌ای از کتاب فیزیولوژی ۱ ساعت وقت می‌گذارد. اگر آیدا در این ویرایش به او کمک کند، ویرایش در ۴۰ دقیقه طول می‌کشد. حال اگر آیدا به تنهایی بخواهد کار ویرایش را انجام دهد، چند دقیقه وقت لازم دارد؟

مثال ✖

اگر دو ماشین چمن‌زنی با هم کار کنند، می‌توانند در ۶ ساعت چمن ورزشگاه را کوتاه کنند. با فرض آن که سرعت کار یکی ۳ برابر دیگری باشد، هر کدام از ماشین‌ها در چه مدتی می‌توانند چمن ورزشگاه را کوتاه کنند؟

مثال ✕

استخری توسط دو شیر A و B پر می‌شود. دو شیر A و B با هم استخر را در ۲ ساعت پر می‌کنند. اگر بدانیم شیر A به تنهایی برای پر کردن استخر ۳ ساعت زمان بیشتر لازم دارد؛ چند ساعت طول می‌کشد که شیر A به تنهایی استخر را پر از آب کند؟

مستطیل طلایی

مستطیلی که نسبت مجموع طول و عرض، به طول آن برابر با نسبت طول و عرض مستطیل باشد، به عبارت دیگر اگر طول و عرض مستطیل به ترتیب x و y باشد؛ داریم:

$$\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y} \xrightarrow{\text{به عبارت دیگر}} \frac{x}{y} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

تست

نسبت طول به عرض یک مستطیل، ۵ به ۴ است. با افزایش طول مستطیل، یک مستطیل طلایی خواهیم داشت. نسبت مساحت مستطیل طلایی به مستطیل اولیه کدام است؟ (سراسری ۱۴۰۲)

- ① $\frac{1}{3} + \sqrt{5}$
- ② $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$
- ③ $\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$
- ④ $\frac{1}{4}(1 + \sqrt{5})$

معادله رادیکالی

هر معادله‌ای که در آن متغیر x زیر رادیکال باشد را معادله رادیکالی می‌گوئیم. در حل معادلات رادیکالی سعی می‌کنیم متغیر x را با استفاده از قضیه توان از زیر رادیکال خارج کنیم. برای فهم بهتر به مثال‌های زیر توجه کنید.

معادلات زیر را حل کنید.

مثال ✖

$$\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3} = 4$$

$$\sqrt{x^2-4} + \sqrt{x^2-x-2} = \sqrt{2x-4}$$

$$\sqrt{x^2+5x+6} + \sqrt{3x^2-5x-42} = 0$$

در حل مثال‌های زیر به بررسی انواع مختلف معادلات رادیکالی و روش‌های حل آن می‌پردازیم:

مثال ✖

$$\sqrt{x^2-2x-3} + \sqrt{x^4-3x^3-x^2+9} = 0$$

$$\sqrt{x-1} + \frac{9}{\sqrt{x-1}+2} = 4$$

$$\sqrt{x-3} + \sqrt{9-\sqrt{3-x}} = 3$$

مجموع معکوس ریشه‌های معادله $\sqrt{x^2+2x+5} + \sqrt{x^2+2x} = 5$ چقدر است؟

مثال ✖

مثال ✕
بیابید؟

حاصل ضرب ریشه‌های معادله $x^2 + 7x = \sqrt{2x^2 + 10x + 12} + 2x - 6$ را

تست‌های سراسری

تست 
(۱۴۰۲)

معادله $\frac{1}{x+2} - \frac{x^2-9x-2}{x^2+8} = \frac{6x}{x^2-2x+4}$ دارای چند جواب مثبت است؟ (سراسری ریاضی)

- ① صفر
② ۳
③ ۲
④ ۱

تست 
تجربی (۱۴۰۲)

معادله $\sqrt{2x-3} = \sqrt{x} + \sqrt{x-2} - \sqrt{2-x}$ چند ریشه حقیقی دارد؟ (سراسری)

- ① ۳
② ۲
③ ۱
④ صفر

تست 
(سراسری ریاضی ۹۴)

حاصل ضرب ریشه‌های حقیقی معادله $x^2 + 4x + 3 = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$ کدام است؟

- ① -۲
② ۱
③ ۲
④ ۴

مجموع ریشه‌های معادله $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{160}{9}$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۱۴۰۲)

تست



- ① ۱
- ② $1/75$
- ③ ۲
- ④ $2/25$

از تقسیم اندازه قطر یک مستطیل به طول آن، عدد طلایی حاصل می‌شود. مجذور نسبت طول به عرض مستطیل کدام است؟ (سراسری خارج تجربی ۱۴۰۲)

تست



- ① $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$
- ② $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$
- ③ $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$
- ④ $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$

بهروز یک مجله را به تنهایی ۹ ساعت زودتر از فرهاد تایپ می‌کند. اگر هر دو با هم کار کنند، در ۲۰ ساعت این کار انجام می‌شود. به تنهایی در چند ساعت این کار انجام می‌شود؟ (سراسری ریاضی ۹۸)

تست



- ① ۳۲
- ② ۳۳
- ③ ۳۵
- ④ ۳۶

تعداد جواب‌های معادله زیر کدام است؟ (سراسری ریاضی ۱۴۰۰)

تست



$$\sqrt{x + \sqrt{-x^2 + 4x^2 + 25x - 100}} + \sqrt{x^2 + \sqrt{-x^2 + 6x - 8}} = x + 2$$

- ① ۳
- ② ۲
- ③ ۱
- ④ صفر

تست  فاصله نقطه تلاقی منحنی‌های $2y = x^2$ و $x = \sqrt{y+3} - \sqrt{y-3}$ با مبدأ مختصات کدام است؟ (سراسری تجربی ۱۴۰۰)

- ① $\sqrt{3}$
- ② $\sqrt{6}$
- ③ $2\sqrt{3}$
- ④ $\sqrt{15}$

تست  اگر $2 = 3a + \sqrt{2a^2 + 4a}$ باشد، عدد $\frac{a+1}{a}$ کدام است؟ (سراسری ۹۸)

- ① $1/5$
- ② $2/5$
- ③ $3/5$
- ④ $4/5$

ALIREZA KASIRI